Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 44

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

11 de noviembre de 2020

1. Escribir u and v en función de p.

Los estados u y v son

$$u_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ \epsilon_i \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \chi_i, \qquad v_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \epsilon_i \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \chi_i \tag{1}$$

Donde $\epsilon_1 = +1$, $\epsilon_2 = -1$ y $\chi_1 = \chi_+$, $\chi_2 = \chi_-$. Sabiendo que

$$\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(\eta) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}, \qquad \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) + 1} = \frac{|\mathbf{p}|c}{E + mc^2}$$

Podemos reescribir los estados como

$$u_i(\mathbf{p}) = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon_i \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \chi_i = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\epsilon_i |\mathbf{p}| c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i$$

$$v_i(\mathbf{p}) = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} \epsilon_i \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \chi_i = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_i |\mathbf{p}| c}{E + mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \chi_i$$

Usando ahora la relación

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})\chi_i = \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)\chi_i = \epsilon_i \chi_i \Longrightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\,\chi_i = \epsilon_i |\mathbf{p}| \chi_i$$

Podemos escribir finalmente la versión final

$$u_i(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i$$

$$v_i(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})c}{E + mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \chi_i$$

2. Calcular χ_- en función de $\hat{\mathbf{n}}$.

El vector χ_- se define como

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos(\theta)}} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta) \\ 1 + \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Usando ahora la relación

$$e^{-i\varphi} \sin\theta = \cos\varphi \sin\theta - i \sin\varphi \sin\theta = n^1 - in^2, \qquad \cos\theta = n^3$$

Llegamos al resultado de

$$\chi_- = \sqrt{\frac{1}{2(1 + n^3)}} \begin{pmatrix} -(n^1 - in^2) \\ 1 + n^3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + n^3)}} \begin{pmatrix} -n^1 + in^2 \\ 1 + n^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3. Demostrar que $[\gamma^\mu p_\mu - mc]\, u_i = [\gamma^\mu p_\mu + mc]\, v_i = 0$.

En el capítulo 43 vimos varia propiedades matemáticas de los espinores u y v, entre las cuales estaban:

$$\gamma^\mu p_\mu + mc = 2mc \sum_i u_i \bar{u}_i, \qquad \gamma^\mu p_\mu - mc = 2mc \sum_i v_i \bar{v}_i \tag{4}$$

Otra relación muy importante que no aparece en ese capítulo, pero que demostré en la solución de los ejercicios de ese capítulo es

$$\bar{u}_i v_j = 0, \qquad \bar{v}_i u_j = 0, \qquad \forall i, j \tag{5}$$

Con estas relaciones demostramos fácilmente que

$$[\gamma^\mu p_\mu - mc]\, u_i = \left(2mc \sum_r v_r \bar{v}_r\right) u_i = 2mc \sum_r v_r \left(\bar{v}_r u_i\right) = 0 \tag{6}$$

$$[\gamma^\mu p_\mu + mc]\, v_i = \left(2mc \sum_r u_r \bar{u}_r\right) v_i = 2mc \sum_r u_r \left(\bar{u}_r v_i\right) = 0 \tag{7}$$